# Planche n° 7. Nombres complexes : corrigé

**Exercice n° 1**

On a $1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Les racines carrées de $1+i$ dans $\mathbb{C}$ sont donc $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$ et $-\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$.
On a aussi, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$(x+iy)^2=1+i\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=1\\x^2+y^2=\sqrt{2}\\xy>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2=\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+1)\\y^2=\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1)\\xy>0\end{array}\right.\Leftrightarrow(x,y)\in\left\{\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}},\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\right\}.$$

Les racines carrées de $1+i$ sont donc aussi $\pm\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$. Puisque $\mathrm{Re}(e^{i\pi/8})=\cos\dfrac{\pi}{8}>0$, on obtient $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$, ou encore

$$e^{i\pi/8}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$$

et donc, par identification des parties réelles et imaginaires,

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\text{ et }\sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.}$$

**Exercice n° 2**

**1)** $z^2+z+1=0\Leftrightarrow z=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=j$ ou $z=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=j^2$.

**2)** $\Delta'=1^2-2=-1=i^2$. L'équation a donc deux solutions non réelles et conjuguées, à savoir $z_1=\dfrac{1}{2}(-1+i)$ et $z_2=\dfrac{1}{2}(-1-i)$.

**3)** Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Pour tout complexe $z$, on a

$$\begin{aligned}z^2-2z\cos\theta+1&=(z-\cos\theta)^2+1-\cos^2\theta=(z-\cos\theta)^2+\sin^2\theta=(z-\cos\theta)^2-(i\sin\theta)^2\\&=(z-\cos\theta-i\sin\theta)(z-\cos\theta+i\sin\theta)=(z-e^{i\theta})(z-e^{-i\theta})\end{aligned}$$

L'équation proposée a donc deux solutions (pas nécessairement distinctes) $z_1=e^{i\theta}$ et $z_2=e^{-i\theta}$.
De plus, $\Delta'=\cos^2\theta-1=-\sin^2\theta$ et ces solutions sont distinctes si et seulement si $\theta\notin\pi\mathbb{Z}$.

**4)** Soit $(E)$ l'équation $z^2-(6+i)z+(11+13i)=0$. Son discriminant est $\Delta=(6+i)^2-4(11+13i)=-9-40i$. Comme $40=2\times20=2\times(4\times5)$ et que $4^2-5^2=16-25=-9$, on est en droit de deviner que $\Delta=(4-5i)^2$. L'équation $(E)$ a deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ à savoir $z_1=\dfrac{6+i+4-5i}{2}=5-2i$ et $z_2=\dfrac{6+i-4+5i}{2}=1+3i$.

**5)** Soit (E) l'équation $2z^2-(7+3i)z+(2+4i)=0$. Son discriminant est $\Delta=(7+3i)^2-8(2+4i)=24+10i$. Comme $10=2\times5=2\times(5\times1)$ et que $5^2-1^2=24$, on est en droit de deviner que $\Delta=(5+i)^2$. L'équation proposée a deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ à savoir $z_1=\dfrac{7+3i+5+i}{4}=3+i$ et $z_2=\dfrac{7+3i-5-i}{4}=\dfrac{1}{2}(1+i)$.

**Exercice n° 3**

**1)** On a $a=e^{2i\pi/5}+e^{8i\pi/5}=e^{2i\pi/5}+e^{-2i\pi/5}=2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $b=e^{4i\pi/5}+e^{6i\pi/5}=e^{4i\pi/5}+e^{-4i\pi/5}=2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.
$1$, $z$, $z^2$, $z^3$ et $z^4$ sont les cinq racines cinquièmes de $1$ dans $\mathbb{C}$. Par suite, $1+z+z^2+z^3+z^4=0$. Mais alors

$$a+b=z+z^2+z^3+z^4=-1$$

et

$$ab=(z+z^4)(z^2+z^3)=z^3+z^4+z^6+z^7=z+z^2+z^3+z^4=-1\text{ (car }z^5=1).$$

$a$ et $b$ sont donc les solutions de l'équation $X^2+X-1=0$ dont les racines sont $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Enfin, puisque $\dfrac{2\pi}{5}\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $a>0$. Par suite, $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$. D'autre part, $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)>0$ et donc,

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=+\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)}=\sqrt{1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

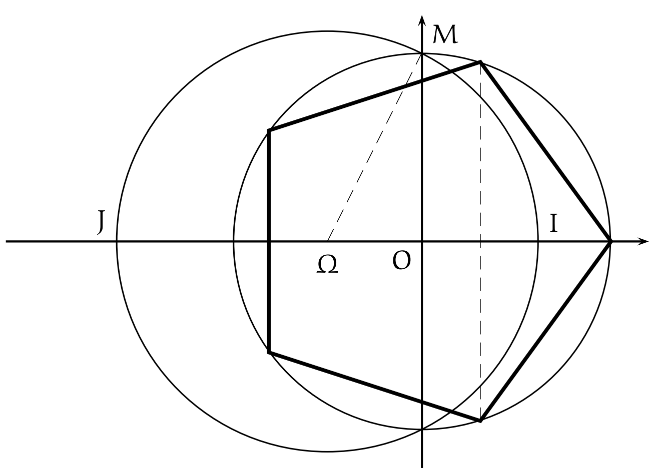
$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\text{ et }\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.}$$

De même, en remplaçant $\sqrt{5}$ par $-\sqrt{5}$, $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)=\dfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Enfin, $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)=-\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{5}\right)=-\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)=\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{5}\right)=\sin\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)=\dfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

**2)** Le rayon du grand cercle vaut, d'après le théorème de Pythagore :

$$R=\sqrt{\Omega O^2+OM^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Donc $x_I=x_\Omega+R=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_J=x_\Omega-R=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Par suite, $x_I+x_J=x_I\times x_J=-1$ puis $x_I=2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $x_J=2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$. Ceci montre que les médiatrices des segments $[O,I]$ et $[O,J]$ coupent le cercle de centre $O$ et de rayon $1$ en quatre des cinq sommets du pentagone.

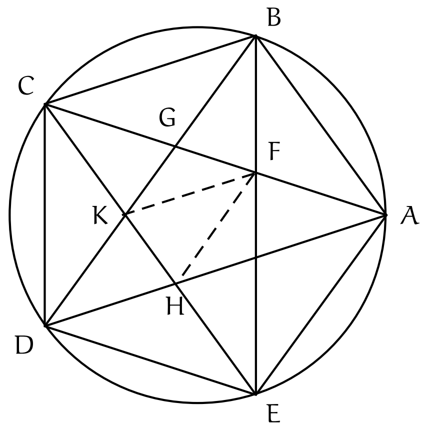



**3)** Posons $x=\dfrac{AF}{AC}$. D'après le théorème de Thales (je vous laisse vérifier les parallèlismes),

$$x=\frac{AF}{AC}=\frac{HK}{HC}=\frac{FG}{FC}=\frac{AC-2AF}{AC-AF}=\frac{1-2x}{1-x}.$$

Donc $x^2-3x+1=0$ et puisque $x<1$, $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Puis
$\dfrac{AG}{AC}=\dfrac{AC-AF}{AC}=1-x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{FG}{AF}=\dfrac{AC-2AF}{AF}=\dfrac{1}{x}-2=\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}-2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}-2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.




Définition du **nombre d'or**.


On veut que $C$ partage le segment $[A, B]$ de telle sorte que $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{AC}{AB}$ (« $\dfrac{\text{petit}}{\text{moyen}} = \dfrac{\text{moyen}}{\text{grand}}$ ») c'est-à-dire, en posant $a = AB$ et $x = AC$, $\dfrac{x}{a} = \dfrac{a-x}{x}$ ou encore $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \dfrac{x}{a} - 1 = 0$ et donc, puisque $\dfrac{x}{a} > 0$, $\dfrac{x}{a} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

$$\boxed{\text{Le nombre d'or (ou proportion dorée) est le nombre } \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0,618...}$$

On peut aussi prendre pour le nombre d'or le rapport $\dfrac{a}{x} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618...$

**Exercice n° 4**

Soit $\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \dfrac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} = e^{2i\alpha}$. Donc,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} &\Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ \frac{1+iz}{1-iz} = e^{i\left(\frac{2\alpha}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)} = \omega_k \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ i(\omega_k+1)z = \omega_k - 1.\end{aligned}$$

Maintenant, pour $k \in \{-1, 0, 1\}$,

$$\omega_k = -1 \Leftrightarrow \frac{2\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3} \in \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha \in -k\pi + \frac{3\pi}{2} + 3\pi\mathbb{Z},$$

ce qui est exclu pour $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Donc,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} &\Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ z = \frac{\omega_k - 1}{i(\omega_k+1)} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ z = \frac{e^{i\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3}\right)}}{e^{i\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3}\right)}} \frac{e^{i\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3}\right)} - e^{-i\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3}\right)}}{i\left(e^{i\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3}\right)}\right)} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ z = \frac{2i\sin\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3}\right)}{i\left(2\cos\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3}\right)\right)} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ z = \tan\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

**Exercice n° 5**

$$(A,B,C)\text{ équilatéral} \Leftrightarrow C = r_{A,\frac{\pi}{3}}(B) \text{ ou } C = r_{A,-\frac{\pi}{3}}(B) \Leftrightarrow c-a = (-j^2)(b-a) \text{ ou } c-a = (-j)(b-a)$$
$$\Leftrightarrow (-1-j^2)a + j^2b + c = 0 \text{ ou } (-1-j)a + jb + c = 0 \Leftrightarrow ja + j^2b + c = 0 \text{ ou } j^2a + jb + c = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(j^2\right)^2 a + j^2b + c = 0 \text{ ou } j^2a + jb + c = 0 \Leftrightarrow j \text{ ou } j^2 \text{ sont solutions de l'équation } az^2 + bz + c = 0$$

$$(A,B,C)\text{ équilatéral} \Leftrightarrow ja + j^2b + c = 0 \text{ ou } j^2a + jb + c = 0$$
$$\Leftrightarrow (ja + j^2b + c)(j^2a + jb + c) = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + (j + j^2)(ab + ac + bc) = 0$$
$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$$

$$(A,B,C)\text{ équilatéral} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$$
$$\Leftrightarrow -a^2 + ab + ac - bc - b^2 + bc + ba - ac - c^2 + ca + cb - ab = 0$$
$$\Leftrightarrow (c-a)(a-b) + (a-b)(b-c) + (b-c)(c-a) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(c-a)(a-b) + (a-b)(b-c) + (b-c)(c-a)}{(b-c)(c-a)(a-b)} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} = 0.$$

**Exercice n° 6**

Le discriminant de l'équation $Z^2 - (5-14i)Z - 2(5i+12) = 0$ vaut

$$(5-14i)^2 + 8(5i+12) = -75 - 100i = 25(-3-4i) = (5(1-2i))^2.$$

L'équation $Z^2 - (5-14i)Z - 2(5i+12) = 0$ admet donc les deux solutions $Z_1 = \dfrac{5-14i+5-10i}{2} = 5-12i$ et $Z_2 = \dfrac{5-14i-5+10i}{2} = -2i$. Ensuite,

$$z \text{ est solution de l'équation proposée} \Leftrightarrow z^2 \text{ est solution de l'équation } Z^2 - (5-14i)Z - 2(5i+12) = 0$$
$$\Leftrightarrow z^2 = 5-12i = (3-2i)^2 \text{ ou } z^2 = -2i = (1-i)^2$$
$$\Leftrightarrow z = 3-2i \text{ ou } z = -3+2i \text{ ou } z = 1-i \text{ ou } z = -1+i.$$

**Exercice n° 7**

Soient $z$ un complexe non nul, $M$ le point d'affixe $z$ et $A$ le point d'affixe $1$.

$$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow |z| = \frac{1}{|z|} \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow OM = 1,$$

et

$$|z| = |z-1| \Leftrightarrow OM = AM \Leftrightarrow M \in \text{med}[OA] \Leftrightarrow x_M = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{Re}(z) = \frac{1}{2}.$$

Donc,

$$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z-1| \Leftrightarrow |z| = 1 \text{ et } \text{Re}(z) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z = -j \text{ ou } z = -j^2.$$

**Exercice n° 8**

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $z = \dfrac{1+ix}{1-ix}$. Puisque $1 - ix \neq 0$, $z$ est bien défini et $|z| = \dfrac{|1+ix|}{|1-ix|} = \dfrac{|1+ix|}{\left|\overline{1+ix}\right|} = 1$.

Enfin, $z = \dfrac{-1+ix+2}{1-ix} = -1 + \dfrac{2}{1-ix} \neq -1$. On a montré que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1+ix}{1-ix} \in U \setminus \{-1\}.$$

Réciproquement, soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$. Il existe un réel $\theta \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Mais alors,

$$\begin{aligned} z = e^{i\theta} &= \frac{e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}(1 + i\tan\frac{\theta}{2})}{\cos\frac{\theta}{2}(1 - i\tan\frac{\theta}{2})} \\ &= \frac{1 + i\tan\frac{\theta}{2}}{1 - i\tan\frac{\theta}{2}} \ (\cos\frac{\theta}{2} \neq 0 \text{ car } \frac{\theta}{2} \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

et $z$ est bien sous la forme voulue avec $x = \tan\dfrac{\theta}{2} \in \mathbb{R}$.

**Exercice n° 9**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$1 + \cos\theta + i\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = -1 \text{ et } \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Donc, $\dfrac{1 + \cos\theta - i\sin\theta}{1 - \cos\theta + i\sin\theta}$ existe pour $\theta \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Pour un tel $\theta$,

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos\theta - i\sin\theta}{1 - \cos\theta + i\sin\theta} &= \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2} - 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \times \frac{\cos(\theta/2) - i\sin(\theta/2)}{\sin(\theta/2) + i\cos(\theta/2)} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \frac{e^{-i\theta/2}}{e^{i(\pi-\theta)/2}} \\ &= -i\,\text{cotan}(\frac{\theta}{2}). \end{aligned}$$

**- 1er cas.** $\text{cotan}\dfrac{\theta}{2} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\theta}{2} \in \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[ \Leftrightarrow \theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} ]2k\pi, \pi + 2k\pi[$.

Dans ce cas, la forme trigonométrique de $\dfrac{1 + \cos\theta - i\sin\theta}{1 - \cos\theta + i\sin\theta}$ est $\text{cotan}\left(\dfrac{\theta}{2}\right) e^{-i\pi/2}$ (module= $\text{cotan}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ et argument= $-\dfrac{\pi}{2}$ $(2\pi)$).

$$\frac{1 + \cos\theta - i\sin\theta}{1 - \cos\theta + i\sin\theta} = \left[\text{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right), -\frac{\pi}{2}\right].$$

**- 2ème cas.** $\text{cotan}\dfrac{\theta}{2} < 0 \Leftrightarrow \theta \in \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} ]\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi[$.

Dans ce cas,

$$\frac{1 + \cos\theta - i\sin\theta}{1 - \cos\theta + i\sin\theta} = -\text{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\pi/2} = \left|\text{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| e^{i\pi/2},$$

et donc,

$$\frac{1 + \cos\theta - i\sin\theta}{1 - \cos\theta + i\sin\theta} = \left[-\text{cotan}(\frac{\theta}{2}), \frac{\pi}{2}\right].$$

**- 3ème cas.** $\text{cotan}\dfrac{\theta}{2} = 0 \Leftrightarrow \theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Dans ce cas, on a $\dfrac{1 + \cos\theta - i\sin\theta}{1 - \cos\theta + i\sin\theta} = 0$.

Pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a

$$\frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2})} = \frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}} = i\,\text{cotan}\frac{\theta}{2}.$$

Si $\theta \in \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} ]2k\pi, \pi + 2k\pi[$, $\dfrac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \left[\text{cotan}\dfrac{\theta}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Si $\theta \in \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} ]\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi[$, $\dfrac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \left[-\text{cotan}\dfrac{\theta}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Si $\theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, $\dfrac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = 0$.

**Exercice n° 10**

$\left(1+i\sqrt{3}\right)^9 = (2e^{i\pi/3})^9 = 2^9e^{3i\pi} = -512.$

> La forme algébrique d'un complexe est particulièrement bien adaptée à l'addition.
> La forme trigonométrique d'un complexe est particulièrement bien adaptée à la multiplication.

**Exercice n° 11**

$i = e^{i\pi/2}$ et les racines quatrièmes de $i$ sont donc les $e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)}$, $k \in \{0,1,2,3\}$. Ensuite,

$$-\frac{8\sqrt{2}}{1+i} = -\frac{8}{e^{i\pi/4}} = -8e^{-i\pi/4} = 2e^{3i\pi/4}.$$

Les racines cubiques de $-\dfrac{8\sqrt{2}}{1+i}$ sont donc les nombres $2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$, $k \in \{-1,0,1\}$, ou encore les trois nombres $2e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(1+i)$, $2e^{-i\pi/12}$ et $2e^{11i\pi/12}$.

**Exercice n° 12**

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$.

$$|1+z+\ldots+z^{n-1}| \leqslant 1+|z|+|z|^2+\ldots+|z|^{n-1} < |z|^n+|z|^n+\ldots+|z|^n = n|z|^n = |nz^n|,$$

et en particulier, $1+z+\ldots+z^{n-1} \neq nz^n$. Donc, si $1+z+\ldots+z^{n-1}-nz^n = 0$, alors $|z| \leqslant 1$.

**Exercice n° 13**

**A- Solutions algébriques.** Pour $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$, posons $z = x+iy$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

**1)** Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$.

$$|Z| = 1 \Leftrightarrow \frac{|1+z|^2}{|1-z|^2} = 1 \Leftrightarrow (1+x)^2+y^2 = (1-x)^2+y^2 \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

L'ensemble cherché est la droite $(Oy)$ (car le point d'affixe $1$ n'appartient pas à $(Oy)$).

**2)** Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$.

$$|Z| = 2 \Leftrightarrow (1+x)^2+y^2 = 4((1-x)^2+y^2) \Leftrightarrow 3x^2+3y^2-10x+3 = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{10}{3}x+1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{5}{3}\right)^2+y^2 = \frac{16}{9}$$

L'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{5}{3},0\right)$ et de rayon $\dfrac{4}{3}$ (car le point d'affixe $1$ n'appartient pas à ce cercle).

**3)** Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$.

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Z = \overline{Z} \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} = \frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}} \Leftrightarrow (1+z)(1-\overline{z}) = (1-z)(1+\overline{z}) \Leftrightarrow z-\overline{z} = \overline{z}-z \Leftrightarrow z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble cherché est la droite $(Ox)$ privé du point de coordonnées $(1,0)$.

**4)** Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$.

$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Z = -\overline{Z} \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} = -\frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}} \Leftrightarrow (1+z)(1-\overline{z}) = -(1-z)(1+\overline{z})$$
$$\Leftrightarrow 1-z\overline{z} = -1+z\overline{z} \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1.$$

L'ensemble cherché est le cercle de centre $O$ et de rayon $1$, privé du point de coordonnées $(1,0)$.

**B- Solutions géométriques (pour 1), 3) et 4)).** Soient $A$ et $B$ les points d'affixes respectives $-1$ et $1$, $M$ le point d'affixe $z$ et $\mathscr{E}$ l'ensemble cherché.

**1)**

$$M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow |z+1| = |z-1| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M \in \text{med}[AB] = (Oy).$$

**3)** Soit $M \neq B$.

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{E} &\Leftrightarrow z = -1 \text{ ou } z \neq -1 \text{ et } \arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 0\ (\pi)\\
&\Leftrightarrow M = A \text{ ou } M \neq A \text{ et } (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0\ (\pi)\\
&\Leftrightarrow M \in (AB) \setminus \{B\}.
\end{aligned}$$

et on retrouve la droite $(Ox)$ privée du point $B(1, 0)$.

**4)** Soit $M \neq B$.

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{E} &\Leftrightarrow z = -1 \text{ ou } z \neq -1 \text{ et } \arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{\pi}{2}\ (\pi)\\
&\Leftrightarrow M = A \text{ ou } M \neq A \text{ et } (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2}\ (\pi)\\
&\Leftrightarrow M \text{ est sur le cercle de diamètre } [AB] \text{ privé de } B.
\end{aligned}$$

et on retrouve le cercle de centre $O$ et de rayon $1$ privé du point $B(1, 0)$.

**Exercice n° 14**

Soit $f$ la transformation considérée.

**1)** $f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(3, -1)$.
**2)** $\omega = 2\omega + 3 \Leftrightarrow \omega = -3$. $f$ est l'homothétie de rapport $2$ et de centre $\Omega(-3, 0)$.
**3)** $\omega = i\omega + 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2}(1+i)$. Comme $i = e^{i\pi/2}$, $f$ est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
**4)** $\omega = (1-i)\omega + 2 + i \Leftrightarrow \omega = 1 - 2i$. Comme $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, $f$ est la similitude de centre $\Omega(1, -2)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

**Exercice n° 15**

**1)** Soit $z \in \mathbb{C}$. Soient $M$, $A$ et $B$ les points d'affixes respectives $z$, $1$ et $-1$.

$$\begin{aligned}
z \text{ solution de } (E) &\Rightarrow (z-1)^n = (z+1)^n \Rightarrow |(z-1)^n| = |(z+1)^n| \Rightarrow |z-1|^n = |z+1|^n\\
&\Rightarrow |z-1| = |z+1| \text{ (car } |z-1| \text{ et } |z+1| \text{ sont des réels positifs)}\\
&\Rightarrow AM = BM \Rightarrow M \in \text{med}[AB] \Rightarrow M \in (Oy) \Rightarrow z \in i\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

**2)** Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$(-z-1)^n - (-z+1)^n = (-1)^n((z+1)^n - (z-1)^n) = -(-1)^n((z-1)^n - (z+1)^n).$$

Par suite,

$$z \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow (z-1)^n - (z+1)^n = 0 \Leftrightarrow (-z-1)^n - (-z+1)^n = 0 \Leftrightarrow -z \text{ solution de } (E).$$

**3)** Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
z \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow (z-1)^n = (z+1)^n \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!]/\ z + 1 = e^{2ik\pi/n}(z-1)\\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!]/\ z = \frac{e^{2ik\pi/n} - 1}{e^{2ik\pi/n} + 1} \Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!]/\ z = \frac{e^{ik\pi/n} - e^{-ik\pi/n}}{e^{ik\pi/n} + e^{-ik\pi/n}}\\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!]/\ z = \frac{2i\sin\frac{k\pi}{n}}{2\cos\frac{k\pi}{n}} \Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!]/\ z = i\,\text{cotan}\,\frac{k\pi}{n}.
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $(E)$ sont les nombres de la forme $i\,\text{cotan}\,\frac{k\pi}{n}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

**Exercice n° 16**

**1)** Soit $z \in \mathbb{C}$. $\operatorname{sh} z$ et $\operatorname{ch} z$ sont définis et donc, $\operatorname{th} z$ existe si et seulement si $\operatorname{ch} z \neq 0$. Or,

$$\operatorname{ch} z = 0 \Leftrightarrow e^{z} + e^{-z} = 0 \Leftrightarrow -e^{2z} = 1 \Leftrightarrow e^{2z+i\pi} = 1 \Leftrightarrow 2z + i\pi \in 2i\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow z \in i\left(-\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right).$$

$\operatorname{th} z$ existe si et seulement si $z \notin i\left(-\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ ou encore $z \notin i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

**2)** Soit $z \notin i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

$$\operatorname{th} z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sh} z = 0 \Leftrightarrow e^{z} = e^{-z} \Leftrightarrow e^{2z} = 1 \Leftrightarrow 2z \in 2i\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow z \in i\pi\mathbb{Z}.$$

Comme $i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \cap i\pi\mathbb{Z} = \varnothing$, $\operatorname{th} z = 0$ si et seulement si $z \in i\pi\mathbb{Z}$.

**3)** Soit $z \notin i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Posons $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
|\operatorname{th} z| < 1 &\Leftrightarrow \left|e^{z} - e^{-z}\right|^2 < \left|e^{z} + e^{-z}\right|^2 \Leftrightarrow \left(e^{z} - e^{-z}\right)\left(e^{\overline{z}} - e^{-\overline{z}}\right) < \left(e^{z} + e^{-z}\right)\left(e^{\overline{z}} + e^{-\overline{z}}\right) \\
&\Leftrightarrow -e^{z-\overline{z}} - e^{-(z-\overline{z})} < e^{z-\overline{z}} + e^{-(z-\overline{z})} \Leftrightarrow 2(e^{2iy} + e^{-2iy}) > 0 \\
&\Leftrightarrow \cos(2y) > 0
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\left\{\begin{array}{l} |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2} \\ |\operatorname{th} z| < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |y| < \frac{\pi}{2} \\ \cos(2y) > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow |y| < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow z \in \Delta.$$

**4)** Soit $z \in \Delta$. D'après 1), $\operatorname{th} z$ existe et d'après 3), $|\operatorname{th} z| < 1$. Donc $z \in \Delta \Rightarrow \operatorname{th} z \in U$. Ainsi, th est une application de $\Delta$ dans $U$.

Soit alors $Z \in U$ et $z \in \Delta$.

$$\operatorname{th} z = Z \Leftrightarrow \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1} = Z \Leftrightarrow e^{2z} = \frac{1 + Z}{1 - Z}.$$

Puisque $Z \neq -1$, $\frac{1 + Z}{1 - Z} \neq 0$ et on peut poser $\frac{1 + Z}{1 - Z} = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in ]-\pi, \pi]$.
Puisque $|Z| < 1$,

$$2\mathrm{Re}\left(\frac{1 + Z}{1 - Z}\right) = \frac{1 + Z}{1 - Z} + \frac{1 + \overline{Z}}{1 - \overline{Z}} = \frac{2\left(1 - |Z|^2\right)}{|1 - Z|^2} > 0$$

et donc $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

En posant $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
e^{2z} = \frac{1 + Z}{1 - Z} &\Leftrightarrow e^{2z} = re^{i\theta} \Leftrightarrow e^{2x} = r \text{ et } 2y \in \theta + 2\pi\mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln r \text{ et } y \in \frac{\theta}{2} + \pi\mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ z = \frac{1}{2}\ln r + \frac{\theta}{2} + k\pi.
\end{aligned}$$

Puisque $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ puis

$$\frac{\theta}{2} + k\pi \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[ \Leftrightarrow k = 0.$$

Mais alors,

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{th} z = Z \\ z \in \Delta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\ln r \\ \\ y = \frac{\theta}{2} \end{array}\right..$$

Ainsi, tout élément $Z$ de $U$ a un et un seul antécédent $z$ dans $\Delta$ (à savoir $z = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+Z}{1-Z}\right| + \frac{i}{2}\mathrm{Arg}\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)$, $\mathrm{Arg}\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)$ désignant l'argument de $\frac{1+Z}{1-Z}$ qui est dans $]-\pi, \pi[$).

th réalise donc une bijection de $\Delta$ sur $U$.